

НМЦ  
навчально-методичний  
центр сільськогосподарських  
вузів України

**МІНІСТЕРСТВО  
АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ  
УКРАЇНИ**

Департамент кадрової  
політики, аграрної освіти і  
науки

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

для виконання контрольної роботи № 2  
“Лінійні електричні кола однофазного  
синусоїдного струму”

для студентів факультету енергетики  
та комп’ютерних технологій

**Харків 2004**



ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ СІЛЬСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

Кафедра “Загальна електротехніка”  
Лабораторія ТОЕ

Методичні вказівки  
для виконання контрольної роботи № 2  
“Лінійні електричні кола однофазного  
синусоїдного струму”

для студентів факультету електрифікації і  
автоматизації сільського господарства

Виконали: доц. Свергун Ю.Ф.,  
доц. Балан Г.П.,  
доц. Черенков О.Д.,  
к.т.н. Кравченко П.О.

Відповідальний за випуск:  
С.І.Васильєв

**Харків 2004**

Автори-укладачі:

**Свергун Ю.Ф.**, кандидат технічних наук; **Балан Г.П.**, кандидат технічних наук; **Черенков О.Д.**, доктор технічних наук; **Кравченко П.О.**, кандидат технічних наук (Харківський державний технічний університет сільського господарства)

Автори виражають подяку доценту кафедри ЮНЕСКО (секція україно- та слов'янознавства) Моїсеєвій Н.І. за допомогу в редагуванні методичних вказівок.

**Рецензент: Ільченко Б.М.**, доцент (Харківський державний технічний університет сільського господарства)

Схвалено і рекомендовано до видання Радою Навчально-методичного центру по заочній формі навчання у закладах освіти 3-4 рівнів акредитації аграрного профілю (план видання навчально-методичної літератури на 2004-2005 н.р., № від )

## 2. Електричні кола синусоїдного струму

### 2.1. Електричні величини, елементи кіл і взаємозв'язки їх

В електричних колах синусоїдного струму електричні величини (ЕРС, напруга й струм) є синусоїдними функціями часу  $t$ :

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e); u = U_m \sin(\omega t + \psi_u); i = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

де  $e, u, i$  – миттєві значення;  $E_m, U_m, I_m$  – амплітудні значення;  $\psi_e, \psi_u, \psi_i$  – початкові фази;  $\omega$  – кутова частота

$$\omega = 2\pi f; \text{ частота } f = \frac{1}{T}; T - \text{період.}$$

Графічне зображення синусоїдної напруги і струму показано на рис. 2.1; на рис. 2.2,а їх показано у вигляді векторів  $\underline{U}_m$  та  $\underline{I}_m$ . Їхня часова взаємовідповідність характеризується фазовим зсувом  $\varphi = \psi_u - \psi_i$ . Додатні напрямки величин типу  $\varphi$  і  $\psi$  так само, як і напруга обертання векторів, відповідають руху проти годинникової стрілки (рис. 2.2).

У розрахунках і при вимірюваннях прийнято оперувати діючими значеннями синусоїдних величин:

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}; U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

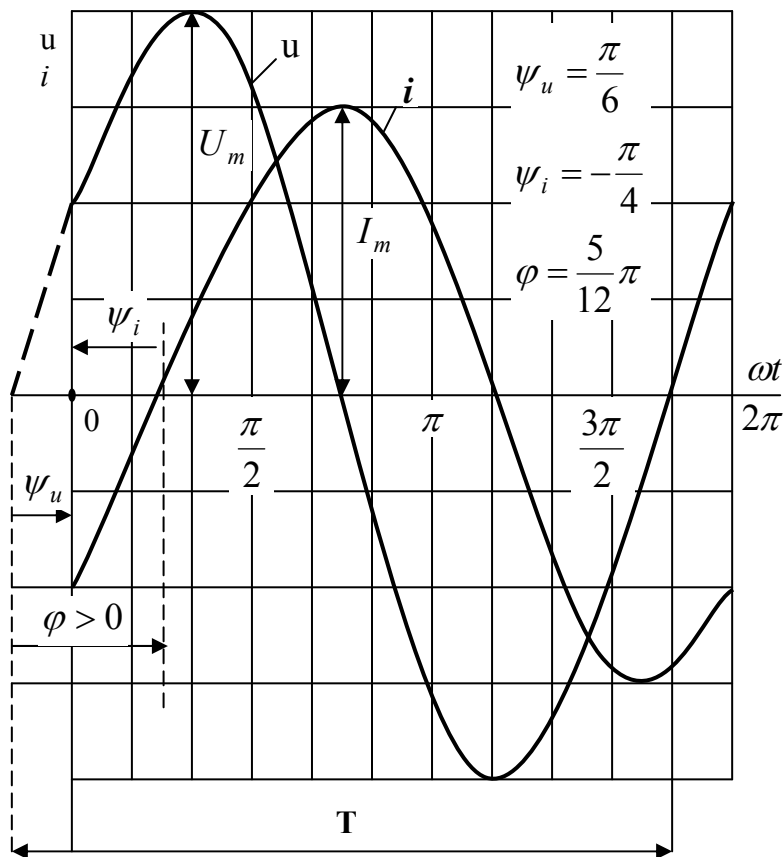


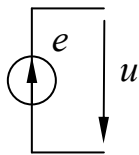
Рис. 2.1

Відповідно на векторній діаграмі вектори зображують у масштабі, що дорівнює їхнім діючим значенням. Крім того, їх фіксують відносно осі  $x$  під кутами, що дорівнюють початковим фазам (рис. 2.2,б). Вектори діючих значень  $\underline{U}$  та  $\underline{I}$  (як і ЕРС) розміщують ще й на комплексній площині з осями дійсних ( $-I, +I$ ) і уявних ( $-j, +j$ ) чисел (див. рис.2.2,в), де  $j = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця. Це дає змогу подати електричні величини комплексними числами, наприклад, у показниковій та алгебричній формах:

$$\underline{U} = Ue^{j\psi_u} = U' + jU''; \underline{E} = Ee^{j\psi_e} = E' + jE''; \underline{I} = Ie^{j\psi_i} = I' + jI'',$$

де  $U', E', I', U'', E'', I''$  – частини комплексних чисел відповідно дійсні й уявні (рис. 2.2,в);  $e$  – основа натурального логарифма, що не слід плутати з позначенням ЕРС.

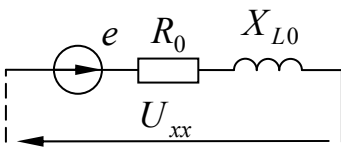
Для розрахунку кіл синусоїдного струму використовують схеми заміщення, у яких реальні джерела й приймачі електроенергії замінюються сукупністю ідеальних елементів. До них належить



ідеальне джерело ЕРС  $e$ , умовне зображення й напрями ЕРС та напругу якого показано на рис. 2.3. При цьому  $U = e$ . Крім того, використовують пасивні ідеальні елементи  $R, L$  і  $C$ , позначення яких та інша інформація наведені в табл. 2.1.

Рис. 2.3

Реальне однофазне джерело електроенергії в схемі заміщення може бути подане, скажімо, сукупністю послідовно з'єднаних ідеальних елементів (рис. 2.4). Значення ЕРС може бути визначене як напруга на розімкнених затискачах джерела



(режим холостого ходу)  $E = U_x$ . Розрахунково-експериментальним методом можуть бути знайдені параметри внутрішнього опору  $R_0$  і –  $X_{L0}$  активний та індуктивні опори.

Рис. 2.4

Реальні приймачі електроенергії, що не містять джерел ЕРС (пасивні двополюсники), відносно їхніх зовнішніх затискачів у найпростішому випадку можуть бути подані одним або двома ідеальними елементами. Наявність конкретних елементів можна встановити, якщо випробувати приймач змінною напругою й виміряти фазовий зсув  $\varphi$  між струмом і напругою. Можливі схеми заміщення приймачів при використанні активного і реактивного опорів, а також активної і реактивної провідностей наведено в табл. 2.2. Значення параметрів схеми заміщення можна визначити за вимірними діючими значеннями струму  $I$  та напруги  $U$ , а також фазовим зсувом  $\varphi$  між напругою і струмом:

$$z = \frac{U}{I}; R = z \cos \varphi; x = z \sin \varphi;$$

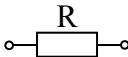

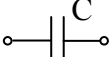
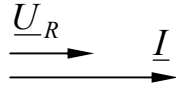
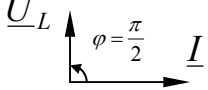
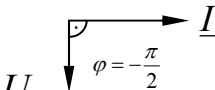
повна, активна і реактивна провідності

$$Y = \frac{I}{U}; G = Y \cos \varphi; B = Y \sin \varphi.$$

Відомо, наприклад, що реальні приймачі (резистор, котушка індуктивності й конденсатор) близькі до варіантів у табл. 2.2 (графи 3, 4 та 1 відповідно).

Приймачі електроенергії можуть з'єднуватися як послідовно, так і паралельно. У першому випадку зручно використовувати схему заміщення з опорами, у другому – з провідностями.

Таблиця 2.1

Назва		Елемент		
		резистивний	індуктивний	ємнісний
Умовне позначення				
Параметр		Активний опір $R$	Індуктивність $L$	Ємність $C$
Одиниця		ом (Ом)	генрі (Гн)	фарад (ф)
Модуль	опору, Ом	$R$	$X_L = \omega L$	$X_C = \frac{1}{\omega C}$
	провідності, Ом	$G = \frac{1}{R}$	$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$	$B_C = \frac{1}{X_C} = \omega C$
Співвідношення напруги та струму	за значенням – закон Ома	$U_R = RI = \frac{I}{G}$	$U_L = X_L I = \frac{I}{B_L}$	$U_C = X_C I = \frac{I}{B_C}$
	зсув по фазі	$\varphi = 0$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$I_2 = \frac{U_{ab}}{Z_2}$
векторна діаграма напруги і струму				
Комплексний опір		$R$	$jX_L$ або $X_L e^{j90^\circ}$	$-jX_C$ або $X_C e^{-j90^\circ}$
Закон Ома для комплексних значень		$\underline{U}_R = R \underline{I}$	$\underline{U}_L = jX_L \underline{I}$	$\underline{U}_C = -jX_C \underline{I}$
Потужність	активна, Вт	$P = U_R I = RI^2$	$P = 0$	$P = 0$
	реактивна, вар	$Q = 0$	$Q_L = U_L I = X_L I^2$	$Q_C = U_C I = X_C I^2$

Таблиця 2.2

Фазовий зсув напруги відносно струму		$\varphi = -90^\circ$	$-90^\circ < \varphi < 0$	$\varphi = 0$	$0 < \varphi < 90^\circ$	$\varphi = 90^\circ$
О п і р	активний	$R = 0$	$R > 0$	$R > 0$	$R > 0$	$R = 0$
	реактивний	$X < 0;$ $X_c = -X$	$X < 0;$ $X_c = -X$	$X = 0$	$X > 0;$ $X_L = X$	$X > 0;$ $X_L = X$
	схема заміщення					
П р о в і д н і с т ь	активна	$G = 0$	$G > 0$	$G > 0$	$G > 0$	$G = 0$
	реактивна	$B < 0;$ $B_c = -B$	$B < 0;$ $B_c = -B$	$B = 0$	$B > 0;$ $B_L = B$	$B > 0;$ $B_L = B$
	схема заміщення					

Однотипні послідовно з'єднані елементи можуть бути замінені еквівалентно відповідними опорами з параметрами

$$R = \sum_{k=1}^p R_k; X_L = \sum_{k=1}^l X_{Lk}; X_c = \sum_{k=1}^q X_{ck},$$

де  $p, l, q$  – кількість резистивних індуктивних та ємнісних елементів.

Однотипні паралельно з'єднані елементи також можуть бути об'єднані в еквівалентні, але вже з використанням провідностей

$$G = \sum_{k=1}^p G_k; B_L = \sum_{k=1}^l B_{Lk}; B_c = \sum_{k=1}^q B_{ck}.$$

У результаті яка-небудь ділянка електричного кола може бути зведена до сукупності трьох послідовно з'єднаних елементів  $R, L$  і  $C$  з відповідними опорами або трьох відповідних елементів, з'єднаних паралельно, з певними провідностями. Ці два варіанти схем заміщення електричного кола без джерел ЕРС наведено в табл. 2.3, у яку зведені також основні величини, що характеризують електричний стан розглядуваних варіантів кола і, крім того, співвідношення між цими величинами. Об'єднуючим параметром ділянки електричного кола з

пасивними елементами може бути повний  $Z$  чи комплексний  $\underline{Z}$  опір або повна  $Y$  чи комплексна  $\underline{Y}$  провідність.

При змішаному з'єднанні елементів у принципі можна виконувати еквівалентні перетворення, використовуючи взаємні перетворення провідностей і опорів (табл. 2.3).

Проте на практиці виявляється ефективнішим використання еквівалентних перетворень комплексних опорів  $\underline{Z}$ , що дані в табл. 2.4. Аналогічні перетворення можливі й з використанням комплексних провідностей  $Y$ , але на практиці здебільшого обходяться комплексними опорами. Формальний вид цих перетворень такий самий, як і в колі постійного струму.

Активну і реактивну потужність в розгалуженому електричному колі можна обчислити поелементно (див. табл. 2.1) або за окремими ділянками кола (див. формули в табл. 2.3). Загальні потужності кола можна дістати підсумовуванням:

$$P = \sum_{k=1}^p P_{Rk} ; Q = \sum_{k=1}^n Q_k = \sum_{k=1}^l Q_{Lk} - \sum_{k=1}^q Q_{Ck} ,$$

причому реактивні потужності підсумовують алгебрично, тобто враховуючи конкретний знак.

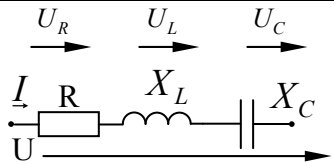
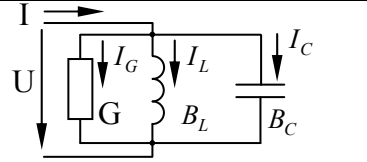
Потужність усього кола або його окремих ділянок можна дістати, використовуючи обчислені для даної ділянки комплексні значення напруги  $\underline{U} = Ue^{j\psi_u}$  і струму  $\underline{I} = Ie^{j\psi_i}$ , причому замість обчисленого комплексу струму  $\underline{I}$  беруть спряжений йому комплексний струм  $\underline{I}^* = Ie^{-j\psi_i}$ . Комплексна потужність

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = Se^{j\varphi} = S \cos \varphi + jS \sin \varphi = P + jQ$$

дає змогу дістати в процесі обчислень (у відповідних формах комплексних чисел) повну  $S$ , активну  $P$  і реактивну  $Q$  потужності.

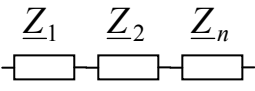

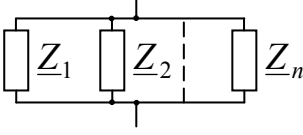

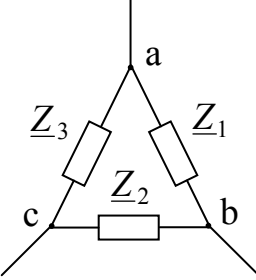
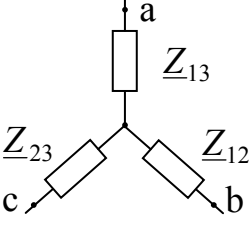
Баланс потужності в колах синусоїдного струму складають, зіставляючи потужність джерела, з одного боку, і сумарну потужність приймачів – з другого. При цьому баланс складають окремо по активній і реактивній потужностях.

Таблиця 2.3

Схема		
Параметри	Опори	Провідності
Активні	<b>R</b>	<b>G</b>
Реактивні	$X = X_L - X_C$	$B = B_L - B_C$
Повні	$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$	$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$

Взаємні переходи від опорів до провідностей і навпаки		$R = \frac{G}{Y^2}; X = \frac{B}{Y};$ $X_L = \frac{B_L}{Y^2}; X_C = \frac{B_C}{Y^2};$ $Z = \frac{1}{Y}$	$G = \frac{R}{Z^2}; B = \frac{X}{Z^2};$ $B_L = \frac{X_L}{Z^2}; B_C = \frac{X_C}{Z^2};$ $Y = \frac{1}{Z}$
Співвідношення напруги і струму	за значенням	$I = \frac{U}{Z};$ $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C;$ $U_R = IR; U_L = X_L I;$ $U_C = X_C I$	$I = UY;$ $\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C;$ $I_R = UG; I_L = UB_L;$ $I_C = UB_C$
	Фазовий зсув	$\varphi = \arctg \frac{X}{R}$	$\varphi = \arctg \frac{B}{G}$
Векторні діаграми			
Трикутники параметрів			
Комплексні величини параметрів в алгебраїчній і показниковій формах		$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C)$ $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$	$\underline{Y} = G - j(B_L - B_C)$ $\underline{Y} = Ye^{-j\varphi}$
Співвідношення параметрів у комплексних величинах		$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}$	$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$
Закон Ома в символічному вигляді		$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$	$\underline{I} = \underline{U}\underline{Y}$
Потужність	повна, $B \cdot A$	$S = UI = ZI^2$	$S = \underline{U}\underline{I} = YU^2$
	активна, Вт	$P = UI \cos \varphi = RI^2$	$P = UI \cos \varphi = GU^2$
	реактивна, вар	$Q = UI \sin \varphi = XI^2$	$Q = UI \sin \varphi = BU^2$

Таблиця 2.4

Тип з'єднання	Ділянка кола	Еквівалентна заміна
Послідовне		 $Z = \sum_{k=1}^n Z_K$
Паралельне		 $\frac{1}{Z} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{Z_K}$
Перетворення трикутника в еквівалентну зірку і навпаки	 $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{12} + \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{13}}{\underline{Z}_{23}}$ $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{13}}$ $\underline{Z}_3 = \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23} + \frac{\underline{Z}_{13}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12}}$	 $\underline{Z}_{13} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$ $\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$ $\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$

Потужності джерела обчислюють за тими самими формулами, що вже наведені, тільки напругу  $U$  або комплексну напругу  $\underline{U}$  слід замінити відповідно діючим  $E$  або комплексним  $\underline{E}$  значенням ЕРС.

Методи розрахунку електричних кіл синусоїдного струму ґрунтуються на законах Кірхгофа, які формально відповідають тому, що вже було розглянуто стосовно кіл постійного струму. Істотною відмінністю є те, що в колах змінного струму рівняння за цими законами складають стосовно миттєвих значень ЕРС, струму, напруги. Крім того, для синусоїдного струму можна скласти рівняння за законами Кірхгофа ще й стосовно векторів електричних величин або їхніх комплексних значень.

Перший закон Кірхгофа:

для миттєвих значень  $\sum_{k=1}^n i_k = 0$ ;

для векторів або комплексних значень  $\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0$ ,

де  $n$  – кількість віток із струмами, що збігаються у вузлі.

Другий закон Кірхгофа:

$$\text{для миттєвих значень } \sum_{k=1}^m e_k = \sum_{k=1}^p R_k i_k + \sum_{k=1}^l L_k \frac{di_k}{dt} + \sum_{k=1}^q \frac{1}{C_k} \int i_k dt,$$

де  $m, p, l, q$  – відповідно кількість джерел ЕРС, резистивних, індуктивних і ємнісних елементів у конкретно розглядуваному контурі електричного кола.

Те саме для векторів або комплексних значень:

$$\sum_{k=1}^m \underline{E}_k = \sum_{k=1}^p \underline{U}_{Rk} + \sum_{k=1}^l \underline{U}_{Lk} + \sum_{k=1}^q \underline{U}_{ck}, \text{ або } \sum_{k=1}^m \underline{E}_k = \sum_{k=1}^d \underline{Z}_k \underline{I}_k,$$

де  $d$  – кількість віток у контурі.

Правила вибору знаків перед членами рівнянь відповідають тому, що було зазначено, коли розглядалися кола постійного струму.

Розрахунок електричних кіл з використанням комплексних чисел дістав назву символічного методу.

У цілому, розраховуючи електричні кола символічним методом, можна використовувати всі ті прийоми й методи, що їх розглянуто на прикладі кіл постійного струму. Формальною відмінністю є те, що замість активних опорів  $R$  або провідностей  $G$  тепер використовують комплексні опори  $\underline{Z}$  або провідності  $\underline{Y}$ , замість сталих значень струмів  $I$ , напруг  $U$  та ЕРС  $E$  – комплексні відповідні величини  $\underline{I}$ ,  $\underline{U}$  та  $\underline{E}$ .

Коротко розглянемо основні дії над комплексними величинами в загальній формі.

Взаємні переходи від алгебричної до показникової форми і навпаки на прикладі комплексного опору й комплексного струму:

$$\underline{Z} = R + jx = \sqrt{R^2 + x^2} e^{j \arctg\left(\frac{x}{R}\right)} = Ze^{j\varphi};$$

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi = R + jx;$$

$$\underline{I} = I' + jI'' = \sqrt{(I')^2 + (I'')^2} e^{j \arctg\left(\frac{I''}{I'}\right)} = Ie^{j\psi_i};$$

$$\underline{I} = Ie^{j\psi_i} = I \cos \psi_i + jI \sin \psi_i = I' + jI''.$$

Зручніше додавати і віднімати комплексні величини в алгебричній формі, множити і ділити – у показниковій. Наприклад, дії згідно з законами Кірхгофа й Ома:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = I'_1 + jI''_1 + I'_2 + jI''_2 = (I'_1 + I'_2) + j(I''_1 + I''_2) = I' + jI'';$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{E} - \underline{U}_1 = E' + jE'' - U'_1 - jU''_1 = (E' - U'_1) + j(E'' - U''_1) = \\ &= U'_2 + jU''_2; \end{aligned}$$

$$\underline{U} = \underline{I}\underline{Z} = Ie^{j\psi_i} Ze^{j\varphi} = IZe^{j(\psi_i + \varphi)} = Ue^{j\psi_u};$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{Ee^{j\psi_e}}{Ze^{j\psi}} = \frac{E}{Z} e^{j(\psi_e - \psi)} = Ie^{j\psi_i}.$$

Після виконання розрахунків діючі значення струмів  $I$ , напруг  $U$  або ЕРС  $E$  виходять як модулі, а їхні початкові фази  $\psi_i, \psi_u, \psi_e$  – як аргументи в показниковій формі комплексних діючих значень струмів  $\underline{I} = Ie^{j\psi_u}$  та ЕРС  $\underline{E} = Ee^{j\psi_e}$ .

При збігу частоти  $\omega$  джерела змінного струму та власної частоти коливань  $\omega_0$  електричного кола в цьому колі виникає стан резонансу. Власні коливання пов'язані з взаємним обміном енергією між індуктивними і ємнісними елементами, тому наявність таких елементів є неодмінною передумовою для резонансу. Одним з наслідків резонансу стає збіг по фазі напруги і струму на входних затискачах кола, тому еквівалентний опір усього такого кола має вигляд активного опору  $R_{екв}$  незважаючи на присутність індуктивних  $L$  і ємнісних  $C$  елементів.

В електроніці узвичаєно відокремлювати випадки резонансу напруг і резонансу струмів. Перший може виникати в колі з послідовним з'єднанням елементів  $L$  і  $C$  (можлива наявність і резистивного елемента  $R$ ); найпростіший варіант такого кола показано на рис. 2.5,а, другий – у колі з паралельним з'єднанням віток, в одній з яких переважає індуктивність, у другій – ємність; варіант такого кола зображено на рис. 2.6,а (у загальному випадку в обох вітках можлива присутність активних опорів  $R1$  і  $R2$ ).

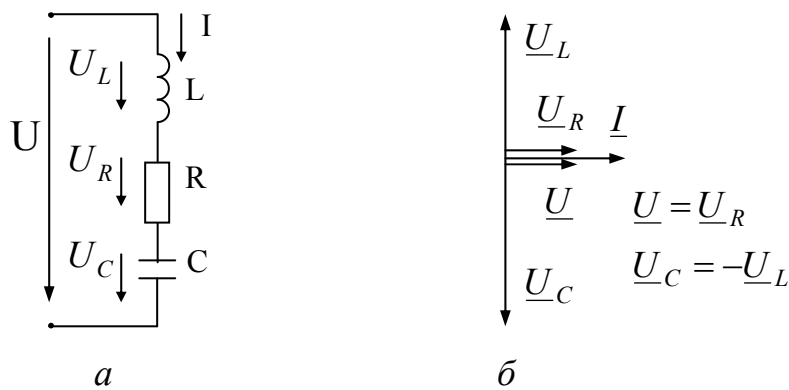


Рис. 2.5

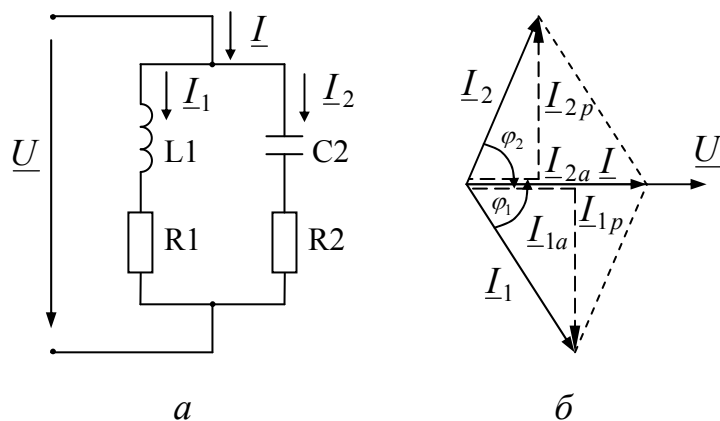


Рис. 2.6

Умова виникнення резонансу напруг – рівність опорів послідовно з'єднаних індуктивного і ємнісного елементів,  $X_L = X_C$  чи  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$  або, що те саме, добір частоти джерела  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Векторну діаграму, що характеризує співвідношення величин при резонансі напруг у колі на рис. 2.5,а, зображено на рис. 2.5,б. Згідно з табл.2.1 напруги на елементах  $U_R = IR$ ;  $U_L = IX_L$ ;  $U_C = IX_C$ . У рівнянні напруг  $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$  взаємно компенсують одна одну  $\underline{U}_L$  і  $\underline{U}_C$  ( $\underline{U}_L = -\underline{U}_C$ ) й лишається  $\underline{U} = \underline{U}_R$ , а фазовий зсув  $\varphi$  між загальною  $\underline{U}$  і струмом  $\underline{I}$  виявляється таким, що дорівнює нулеві ( $\varphi = 0$ ).

Умова виникнення резонансу струмів – рівність реактивних провідностей паралельних віток – індуктивної провідності однієї і ємнісної провідності іншої вітки (рис. 2.6,а)  $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4$  або

$$\frac{X_{L1}}{R_1^2 + X_{L1}^2} = \frac{X_{C2}}{R_2^2 + X_{C2}^2} \text{ (див. табл. 2.3).}$$

У цьому випадку резонансна частота може бути визначена з останнього співвідношення з урахуванням того, що  $X_{L1} = \omega_0 L_1$  і

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega_0 C_2}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \sqrt{\frac{(\rho^2 - R_1^2)}{(\rho^2 - R_2^2)}},$$

$$\text{де } \rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}.$$

Векторну діаграму, що характеризує співвідношення величин при резонансі струмів у колі на рис. 2.6,а, зображено на рис. 2.6,б. Якщо вектори струмів  $\underline{I}_1$  і  $\underline{I}_2$  розкласти на активні  $I_{1a}$ ,  $I_{2a}$  і реактивні  $I_{1p}$  і  $I_{2p}$  складові, то в рівнянні струмів

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_{1a} + \underline{I}_{1p} + \underline{I}_{2a} + \underline{I}_{2p} = \underline{I}_{1a} + \underline{I}_{2a}$$

реактивні складові  $\underline{I}_{1p}$  і  $\underline{I}_{2p}$  компенсують одна одну ( $\underline{I}_{1p} = -\underline{I}_{2p}$ ) і крім того, що  $I_{1p} = UB_{L1}$ ;  $I_{2p} = UB_{C2}$  і внесок у загальний струм кола дають тільки активні складові; фазового зсуву  $\varphi$  між напругою  $U$  та загальним струмом  $\underline{I}$  немає, тобто  $\varphi = 0$ .

Резонансні явища знаходять практичне застосування в багатьох пристроях теле- і радіозв'язку, у промислових електроенергетичних системах.

## Приклади розрахунку електричних кіл та побудова векторних діаграм

### Множення вектору на $j$ та $-j$

Є деякий вектор  $\underline{A} = Ae^{j\alpha}$ . Помножимо цей вектор на  $j$ , а потім на  $-j$ . Представимо  $j$  та  $-j$  у такому вигляді:

$$e^{j90^\circ} = \cos 90^\circ + j \sin 90^\circ = j$$

$$e^{-j90^\circ} = \cos 90^\circ - j \sin 90^\circ = -j$$

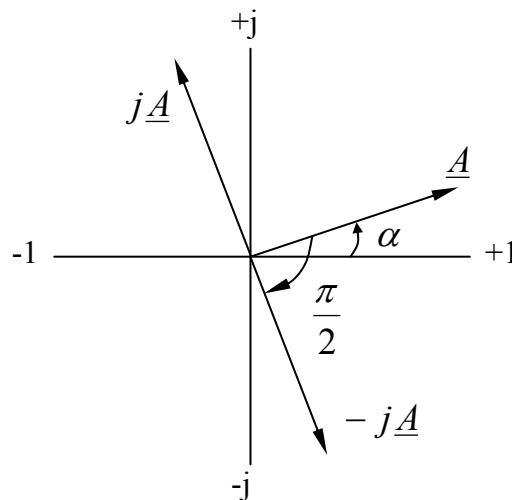
Помножимо вектор  $\underline{A}$  на  $j$ .

$$j\underline{A} = e^{j90^\circ} Ae^{j\alpha} = Ae^{j(\alpha+90^\circ)}$$

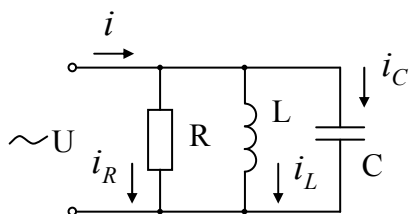
Тобто помноження вектору  $\underline{A}$  на  $j$  дає повний вектор який по модулю дорівнює  $A$ , але повернутий в бік випередження (проти годинної стрілки) по відношенню до вектору  $\underline{A}$  на кут  $90^\circ$ .

Множення вектору  $\underline{A}$  на  $-j$  повертає вектор  $\underline{A}$  на кут  $90^\circ$  в бік відставання (по годинній стрілці) також без зміни його модулю.

$$-j\underline{A} = e^{-j90^\circ} Ae^{j\alpha} = Ae^{j(\alpha-90^\circ)}$$



Розрахунок електричних кіл з паралельним з'єднанням елементів R,L,C символічним методом.



До кола прикладемо напругу

$$U = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

Задані значення R,L,C. Визначити струми у вітках кола та в нерозгалуженій частині кола.

Згідно з першим законом Кірхгофа для струмів запишемо рівняння:

$$i = i_R + i_L + i_C \quad \text{чи} \quad \underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$$

Використовуючи для кожної вітки закон Ома у комплексній формі здобудемо значення комплексів струмів.

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{U}{R} e^{j\psi_u}; \quad \underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{j\omega L} = \frac{U}{\omega L} e^{j\left(\psi_u - \frac{\pi}{2}\right)};$$

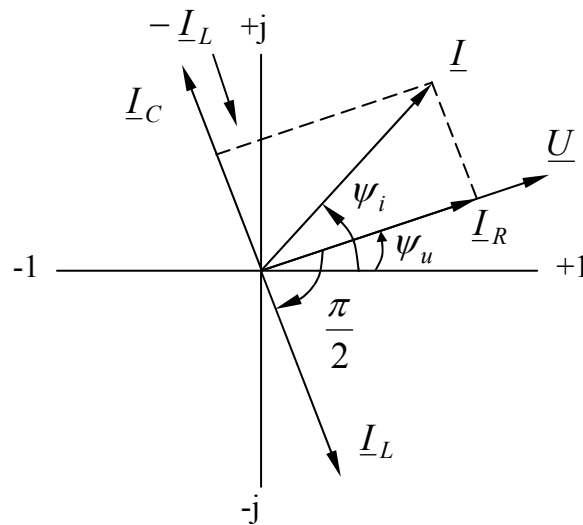
$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega C U e^{j\psi_u} = \omega C U e^{j\left(\psi_u + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Із здобутих рівнянь видно, що:

1. Струм у активному опорі співпадає по фазі з напругою.
2. Струм у індуктивності відстає від напруги по фазі на кут  $\frac{\pi}{2}$ .
3. Струм у ємності випереджує по фазі напругу на кут  $\frac{\pi}{2}$ .

### Графічне вирішення задачі.

Визначимо струм на вході кола за допомогою векторної діаграми. Зобразимо відношення  $\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$  на векторній діаграмі. Вектори струмів відкладаємо у масштабі струмів “ $m_i$ ”.



Відкладемо на комплексній площині вектор який відображає напругу.

Струм у активному опорі співпадає по фазі з напругою, тому вектор  $\underline{I}_R$  співпадає по напрямку з вектором  $\underline{U}$ . Струм у індуктивності відстає по фазі від напруги на  $\frac{\pi}{2}$ , тому і вектор струму

$\underline{I}_L$  відстає від вектору напруги на кут  $\frac{\pi}{2}$ , тобто його повернуто на  $\frac{\pi}{2}$  у негативному напрямку.

Струм у ємності випереджує напругу по фазі на  $\frac{\pi}{2}$ , тому вектор струму  $\underline{I}_C$  повернуто відносно вектору напруги на  $\frac{\pi}{2}$  у позитивному напрямку.

Ці міркування про взаємне розташування векторів струмів та напруг впливають із рівнянь складених згідно першого закону Кірхгофа для комплексів струмів.

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$$

Дійсно вектор  $\underline{I}_R$  здобуто діленням напруги  $\underline{U}$  на дійсну величину. Аргумент комплексу  $\underline{I}_R$  дорівнює аргументу комплексу  $\underline{U}$ . Тому напрям вектора струму співпадає з напрямком напруги  $\underline{U}$ .

Вектор  $\underline{I}_L$  здобуто діленням  $\underline{U}$  на  $j\omega L$ . Ділення комплексної величини на дійсну величину  $\omega L$  змінює модуль, але не змінює аргумент, а множення вектора на “-j” зменшує аргумент на  $\frac{\pi}{2}$ . Тому

вектор  $\underline{I}_L$  повернуто відносно вектору  $\underline{U}$  на кут  $\frac{\pi}{2}$  у негативному напрямку, тобто у бік відставання (по годинній стрілці).

Вектор  $\underline{I}_C$  здобуто множенням вектору  $\underline{U}$  на  $\underline{I}_{2p}$ . Множення комплексної величини на дійсну  $\omega C$  змінює модуль, але не змінює аргумент, а множення на j збільшує аргумент на  $\frac{\pi}{2}$ . Тому вектор  $\underline{I}_C$

повернуто відносно вектору  $\underline{U}$  на кут  $\frac{\pi}{2}$  у позитивному напрямку, тобто у бік випередження. Сумуючи вектори  $\underline{I}_R$ ,  $\underline{I}_L$ ,  $\underline{I}_C$  здобудемо вектор  $\underline{I}$ . Його довжина у масштабі струмів визначає діюче значення струму  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  у нерозгалуженій частині кола, а розташування вектора

$\underline{I}$  відносно осей координат визначає початкову фазу  $\psi_i$ .

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

Аналітичне рішення задачі.

Здобувши значення комплексів запишемо миттєві значення цих струмів у вигляді функцій часу:

$$i_R = \sqrt{2}I_R \sin(\omega t + \psi_u), \text{ де } I_R = \frac{U}{R};$$

$$i_L = \sqrt{2}I_L \sin\left(\omega t + \psi_u - \frac{\pi}{2}\right), \text{ де } I_L = \frac{U}{\omega L};$$

$$i_C = \sqrt{2}I_C \sin\left(\omega t + \psi_u - \frac{\pi}{2}\right), \text{ де } I_C = U\omega C.$$

Знайдемо вираз для сумарного струму. Для цього підставимо значення комплексів струмів у рівняння, яке складено для них згідно першого закону Кірхгофа.

$$\underline{I} = \frac{U}{R} + \frac{U}{j\omega L} + j\omega CU = U \left[ \frac{1}{R} - j \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \right]$$

Із цього виразу визначаємо комплексну провідність.

$$Y = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{R} - j \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right) = g - j(b_L - b_C), \text{ де } g = \frac{1}{R}; b_L = \frac{1}{\omega L}; b_C = \omega C,$$

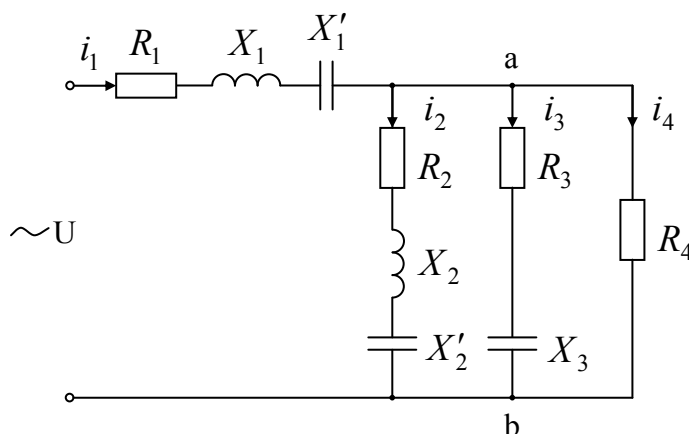
звуться відповідно активною, індуктивною та ємнісною провідностями.  $b = b_L b_C$  – реактивна провідність.

$$\underline{I} = \underline{U}Y = U e^{j\psi_u} \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2} e^{-j\varphi}$$

Із останнього виразу виходить, що  $I = U \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$ ;

$$\psi_i = \psi_u - \varphi, \text{ тобто } i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi_i).$$

### Розрахунок електричних кіл при змішаному з'єднанні приймачів.



В загальному випадку для розрахунку кола складають рівняння згідно законів Кірхгофа. Але коли ми маємо одне джерело енергії (як у нашому випадку), то можливо вирішити задачу більш просто, шляхом перетворення схеми.

Рішення. Варіант 1.

1. Знаходимо провідність паралельно з'єднаних приймачів.

$$\underline{Y}_{ab} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 = \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_4} = \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_4 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_4 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 \underline{Z}_4}$$

$$2. \underline{Z}_{ab} = \frac{1}{Y_{ab}} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 \underline{Z}_4 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_4 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}$$

3. Загальний опір кола.

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{ab}$$

4.  $\underline{I}_1 = \frac{U}{\underline{Z}}$  – струм у вітці  $\underline{Z}_1$  у нерозгалуженій частині схеми.

5. Напруга на паралельній ділянці схеми.

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{ab}$$

6. Струми у вітках  $\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_2}$ ;  $\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3}$ ;  $\underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_4}$

Перевірку розрахунків можна зробити за допомогою першого закону Кірхгофа

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4$$

та другого закону Кірхгофа

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_{ab}.$$

Варіант 2.

1. Знаходимо активну та реактивну складові провідності ділянки “ab”.

$$g_{ab} = g_2 + g_3 + g_4; b_{ab} = b_2 - b_3 + b_4; b_2 = \frac{X_2 - X'_2}{R_2^2 + (X_2 - X'_2)^2}; b_3 = \frac{X_3}{R_3^2 + X_3^2};$$

$$b_4 = 0$$

$$\text{де } g_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + (X_2 - X'_2)^2}; \text{ нехай } X_2 > X'_2; g_3 = \frac{R_3}{R_3^2 + X_3^2};$$

$$g_4 = \frac{R_4}{R_4^2 + X_4^2} = \frac{1}{R_4}.$$

2. Знаходимо активну та реактивну складові опору ділянки “ab”.

$$R_{ab} = \frac{g_{ab}}{g_{ab}^2 + b_{ab}^2}; X_{ab} = \frac{b_{ab}}{g_{ab}^2 + b_{ab}^2}; Z_{ab} = \sqrt{R_{ab}^2 + X_{ab}^2}$$

3. Знаходимо активну, реактивну складові та повний опір усього кола відносно вхідних затискачів.

$$R = R_1 + R_{ab}; X = X_1 - X'_1 + X_{ab}; \text{ нехай } X_{ab} > 0; Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

4. Струм у нерозгалуженій частині (послідовній).

$$I_1 = \frac{U}{Z}$$

5. Напруга на ділянці “ab”  $U_{ab} = I_1 Z_{ab}$ .

6. Струми у вітках паралельного з'єднання.

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{Z_2}; I_3 = \frac{U_{ab}}{Z_3}; I_4 = \frac{U_{ab}}{Z_4}; \text{ де } Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (X_2 - X'_2)^2};$$

$$Z_3 = \sqrt{R_3^2 + X_3^2}; Z_4 = R_4.$$

Ці струми можливо визначити інакше:

$$I_2 = U_{ab} y_2; I_3 = U_{ab} y_3; I_4 = U_{ab} y_4; \text{ де } B \quad C \quad ; y_3 = \sqrt{g_3^2 + b_3^2}; \\ y_4 = g_4.$$

Порівнюючи варіанти 1 та 2 бачимо, що другий варіант складніший.

Побудуємо векторну діаграму щоб перевірити правильність рішення задачі.

Векторну діаграму починаємо будувати з самої дальньої ділянки кола чи зі струму чи з напруги. Поступово рухаючись до початку кола і сумуючи струми та напруги, визначаємо струм та напругу на вході кола. Якщо значення напруги, яке прикладене до кола, дорівнює заданому, задача вирішена правильно (мається на увазі, що значення останніх напруг та струмів дорівнюють здобутим при розрахунку значенням).

Відкладаємо у масштабі напруг вектор  $\underline{U}_{ab}$ . Вектор струму  $\underline{I}_4$  співпадає з ним по фазі (опір  $R_4$  – активний). Вектори струмів  $\underline{I}_3$  та  $\underline{I}_2$  будуємо у вигляді сум їх активних та реактивних складових.

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{a3} + \underline{I}_{p3} = \underline{U}_{ab} g_3 + j \underline{U}_{ab} b_3;$$

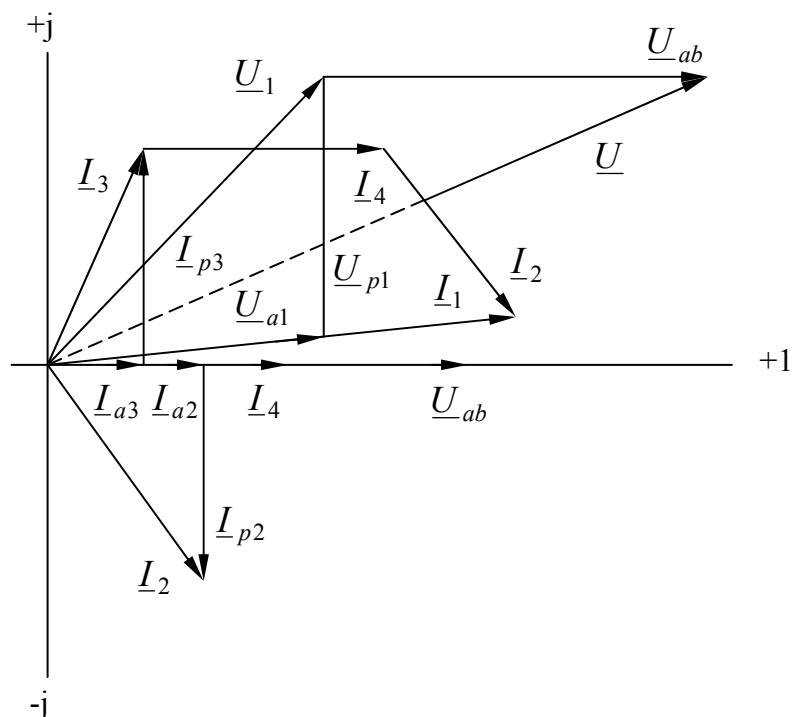
$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{a2} + \underline{I}_{p2} = \underline{U}_{ab} g_2 - j \underline{U}_{ab} b_2; \text{ при } X_2 > X'_2$$

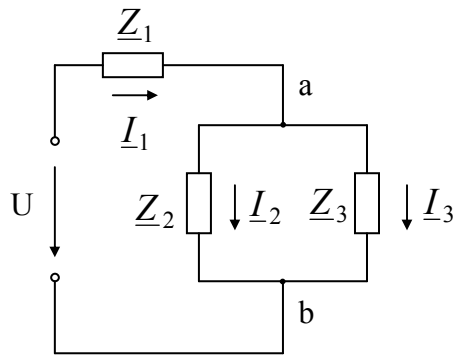
Визначимо струм  $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4$ .

Будуємо вектор напруги на першому приймачі  $\underline{U}_1 = \underline{U}_{a1} + \underline{U}_{p1} = \underline{I}_1 R_1 + j \underline{I}_1 (X_1 - X'_1)$ ; при  $X_1 > X'_1$ .

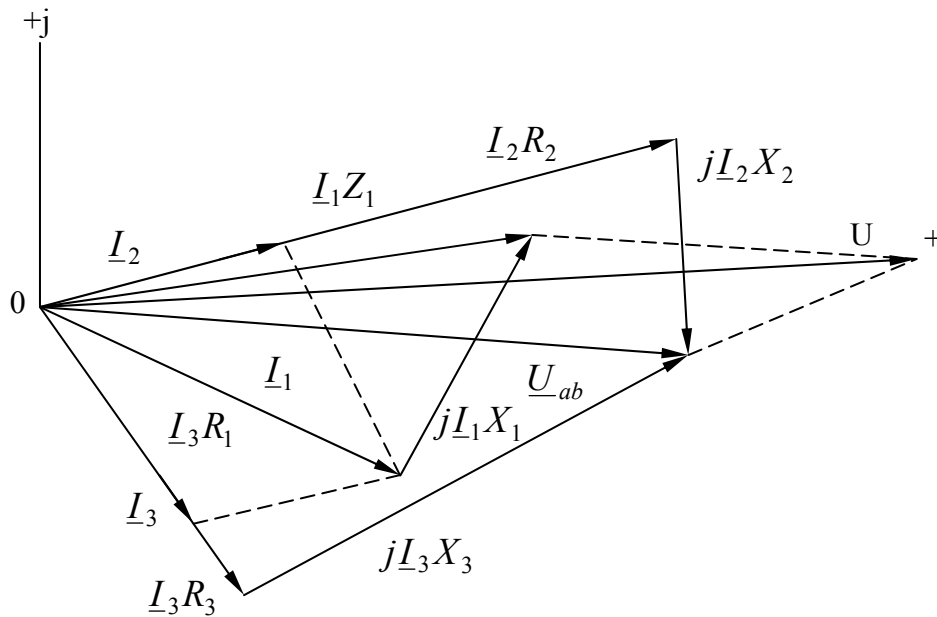
Вектор напруги на вході кола знаходимо як суму векторів  $\underline{U}_1$  та  $\underline{U}_{ab}$ .

Якщо здобути значення напруги на вході кола дорівнює заданому, то задача вирішена вірно.





a)



б)

Рис. 1

Приклад.

У колі (рис. 1,а) дано:  $U = 120\text{В}$ ;  $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = (10 + j6)\text{Ом}$ ;  $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = (24 - j7)\text{Ом}$ ;  $\underline{Z}_3 = R_3 + jX_3 = (15 + j20)\text{Ом}$ .

Визначити струми  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$ ,  $\underline{I}_3$ , активні і реактивні потужності всього кола і окремих вітках. Побудувати векторну діаграму.

Рішення. Повний опір кола

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 10 + j6 + \frac{(24 - j7)(15 + j20)}{39 + j13} = 24,4 + j10,8 = 26,7e^{j23^\circ 55'} \text{ Ом}$$

У нерозгалуженій частині кола проходить струм

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{Z} = \frac{120}{26,7e^{j23^\circ 55'}} = 4,5e^{-j23^\circ 55'} \text{ А}$$

Струми в паралельних вітках можуть бути виражені через струм в нерозгалуженій частині кола.

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4,5e^{-j23^\circ55'} \frac{15 + j20}{39 + j13} = 2,74e^{j10^\circ45'} \text{ A.}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4,5e^{-j23^\circ55'} \frac{24 - j7}{39 + j13} = 2,74e^{-j58^\circ35'} \text{ A.}$$

Струми  $\underline{I}_2$  і  $\underline{I}_3$  можна знайти і іншим шляхом:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{ab} = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4,5e^{-j23^\circ55'} \frac{(24 - j7)(15 + j20)}{39 + j13} = 68,4e^{-j5^\circ30'} \text{ B;}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_2} = \frac{68,4e^{-j5^\circ30'}}{24 - j7} = 2,74e^{j10^\circ45'} \text{ A;}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = \frac{68,4e^{-j5^\circ30'}}{15 + j20} = 2,74e^{j58^\circ35'} \text{ A.}$$

Знайдемо потужності (активні) усього кола й окремих вітвей:

$$P = \text{Re}[\underline{U}\underline{I}_1^*] = \text{Re}[120 \cdot 4,5e^{j23^\circ55'}] = 120 \cdot 4,5 \cos 23^\circ55' = 494 \text{ Вт;}$$

$$P_1 = I_1^2 R_1 = 4,5^2 \cdot 10 = 202 \text{ Вт; } P_2 = I_2^2 R_2 = 180 \text{ Вт; } P_3 = I_3^2 R_3 = 112 \text{ Вт.}$$

Перевірка показує, що  $P = P_1 + P_2 + P_3$ .

Визначимо реактивні потужності всього кола й окремих вітвей:

$$Q = \text{Im}[\underline{U}\underline{I}_1^*] = \text{Im}[120 \cdot 4,5e^{j23^\circ55'}] = 120 \cdot 4,5 \sin 23^\circ55' = 218 \text{ вар;}$$

$$Q_1 = I_1^2 X_1 = 4,5^2 \cdot 6 = 122 \text{ вар; } Q_2 = I_2^2 X_2 = -52,5 \text{ вар;}$$

$$Q_3 = I_3^2 X_3 = 150 \text{ вар.}$$

З огляду на те, що реактивні потужності котушок  $Q_1$  і  $Q_3$  позитивні, а реактивна потужність конденсатора  $Q_2$  негативна, одержимо  $Q = 122 - 52,5 + 150 \approx 218$  вар.

На рис. 1,б приведена векторна діаграма. Порядок побудови наступний: за результатами розрахунків відкладені вектори струмів  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$  і  $\underline{I}_3$ , потім по напрямку відкладені вектор  $\underline{I}_1 R_1$  і перпендикулярно йому убік випередження вектор  $j\underline{I}_1 X_1$ . Їхня сума дає вектор  $\underline{I}_1 Z_1$ . Далі у фазі з  $\underline{I}_2$  побудований вектор  $\underline{I}_2 R_2$  і перпендикулярно йому убік відставання (тому що  $X_2$  негативно) вектор  $X_2 \underline{I}_2$ , а їхня сума дає вектор напруги на рівнобіжній ділянці  $\underline{U}_{ab}$ . Той же вектор можна одержати, якщо у фазі  $\underline{I}_3$  відкласти  $\underline{I}_3 R_3$  і до нього додати вектор  $j\underline{I}_3 X_3$ , який випереджає  $\underline{I}_3$  на кут  $\frac{\pi}{2}$ . Сума векторів  $\underline{I}_1 Z_1$  та  $\underline{U}_{ab}$  дає вектор напруги на вході схеми.

## Розрахунково-графічна робота № 2

(Контрольна робота № 1 для студентів заочної освіти)  
з дисципліни “Теоретичні основи електротехніки”)

Визначити струми у колі (рис. 1). Побудувати векторну діаграму. Визначити значення ємності  $C_6$ , при якій у вітках з опорами  $R_5$  і  $R_6$  буде резонанс струмів.

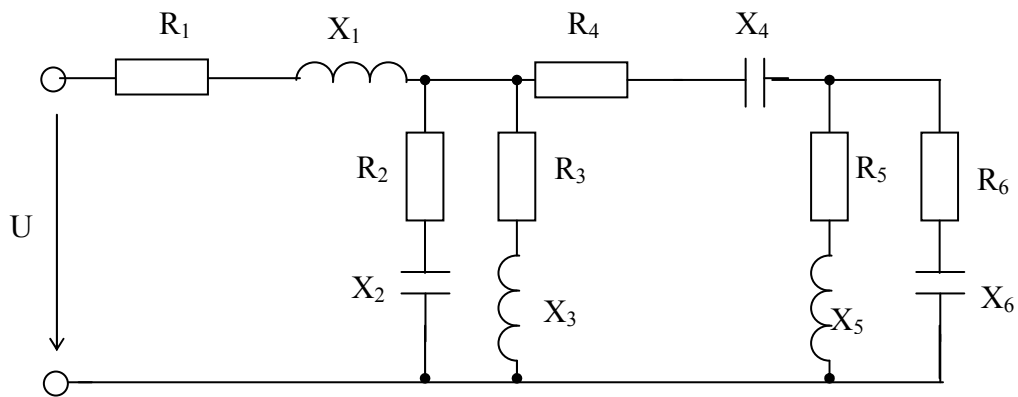


Рис. 1.

Параметри кола вказані у таблиці варіантів.

ва рі ант	U	X <sub>1</sub>	R <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	R <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	R <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	R <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	R <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	R <sub>6</sub>
	B	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом
1	200	2	6	1	7	5	5	1	5	6	8	8	6
2	100	0	0	8	6	4	3	1	5	6	8	8	6
3	200	30	10	∞	∞	5	5	1	5	6	8	8	6
4	100	2,71	0,9	5	5	∞	∞	1	5	6	8	8	6
5	100	3,39	0,15	5	5	4	4	0	4	8	6	6	8
6	100	1	0,67	5	5	4	5	1	5	∞	∞	1	7
7	100	1	0,67	5	5	4	7	1	7	1	7	∞	∞
8	105	1	0	6	8	6	0	5	0	5	5	5	5
9	120	1	3	8	6	8	3	4	3	0	0	1	1
10	220	1	8	8	6	8	3	4	3	1	1	0	0
11	127	3	4	∞	∞	5	5	2	5	15	8	8	20
12	127	3	5	6	5	∞	2	3	2	10	4	8	14
13	127	3	6	15	10	9	5	20	5	0	0	12	10
14	127	3	7	10	12	3	8	2	8	12	14	7	10
15	127	3	8	0	20	19	3	8	3	14	13	2	8
16	220	4	9	3	6	0	7	2	7	10	10	5	8
17	220	4	10	2	5	20	3	8	3	2	3	4	4
18	220	4	11	1	4	18	2	6	2	6	10	12	21
19	220	4	12	14	20	16	10	4	10	10	8	12	18
20	220	4	13	4	15	14	8	21	8	16	12	9	19
21	230	0	25	16	14	9	6	4	6	2	10	12	12
22	230	20	8	8	15	2	6	5	6	3	2	10	7
23	230	9	8	4	10	3	6	3	6	15	10	14	4
24	230	10	7	0	12	8	6	12	6	10	7	10	5
25	230	25	4	16	8	0	12	20	12	18	13	11	3
26	120	30	20	15	10	18	4	8	4	13	6	12	10
27	120	8	5	10	8	2	10	0	10	6	3	8	6
28	120	21	0	12	10	6	14	10	14	12	6	16	8
29	120	4	9	3	0	6	5	2	5	10	8	5	9
30	120	2	4	12	4	0	18	12	18	9	16	2	4





Свергун Ю.Ф., Балан Г.П., Черенков О.Д., Кравченко П.О.

Методичні вказівки  
для виконання контрольної роботи № 2  
“Лінійні електричні кола однофазного синусоїдного струму”

для студентів факультету електрифікації і автоматизації сільського  
господарства

Відповідальний за випуск: С.І.Васильєв  
Формат паперу 60x84 1/16 обл.-вид.ар.2,2  
Тираж 300  
Різограф TR 1510 № 80654645

Навчально-методичний центр по заочній формі навчання у  
зкладах освіти 3-4 рівнів акредитації аграрного профілю

*Адреса: 61002, м. Харків, вул. Артема, 44, кім.101*

